AP zu: Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

2001 – SII

5.0 Ein neugieriger Nachbar von Herrn Molle führt schon seit längerem Aufzeichnungen über dessen abendliches Nachhausekommen. Kommt Herr Molle nach 22.00 Uhr heim, notiert der Nachbar dies als „Verspätung“. Die Zufallsgröße Y gibt Herrn Molles Verspätungen in Stunden (gerundet) an. Es ergibt sich dabei mit $a, b \in [0; 1]$ folgende Wahrscheinlichkeitstabelle:

y	0	1	2	3	4	5
P(Y = y)	a	0,40	0,25	a + b	b	0,05

5.1 Bestimmen Sie a und b, wenn $P(Y \leq 2) = 0{,}70$ ist. (Ergebnis: a = 0,05; b = 0,10) (3 BE)

5.2 Errechnen Sie, wie viele Stunden Herr Molle im Beobachtungszeitraum durchschnittlich zu spät nach Hause kommt. (Ergebnis: E(Y) = 2) (2 BE)

5.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\left|Y - E(Y)\right| \leq \sqrt{Var(Y)})$. (4 BE)

2002 – SI

2.0 Die Druckmaschine wird korrigiert. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Fehlerarten an, die bei einer zufällig ausgewählten Briefmarke des neuen Drucks auftreten. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X kann mit Hilfe eines geeigneten Parameters $a \in \mathbb{R}$ so dargestellt werden:

x	0	1	2	3
P(X=x)	0,4a	$0{,}025a^2$	0,05	0,05

2.1 Berechnen Sie den Parameter a. (4 BE)

Für die Teilaufgaben 2.2 bis 2.4 gilt: a = 2.

2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert der Zufallsgröße innerhalb der zweifachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt. (4 BE)

2.3 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 200 zufällig ausgewählten Briefmarken des neuen Drucks mindestens 150 und höchstens 170 fehlerfrei sind. (2 BE)

2.4 Geben Sie die Wertetabelle der zugehörigen kumulativen Verteilungsfunktion F an und zeichnen Sie deren Graph farbig in ein geeignetes Koordinatensystem. Bestimmen Sie ferner den Wert $k = 1 - F(2{,}3)$ und interpretieren Sie ihn im Sinne der vorliegenden Thematik. (4 BE)

2003 – SI

2.0 Bei der Untersuchung von Kiefernnadeln wird die Länge L von 200 zufällig ausgewählten Nadeln bestimmt und in sechs Längengruppen eingeteilt. Die Zufallsgröße X gibt die Nummer der jeweiligen Längengruppe an. Dabei ergibt sich folgende Verteilung mit $a, b \in \mathbb{N}$:

L in mm	$L \leq 40$	$40 < L \leq 44$	$44 < L \leq 48$	$48 < L \leq 52$	$52 < L \leq 56$	$L > 56$
Längengruppe	1	2	3	4	5	6
Anzahl	8	a	2a	90	b	12

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Nadel in einer der Längengruppen 4 bis 6 liegt, beträgt dabei 0,66.

2.1 Berechnen Sie die Werte der Parameter a und b. (3 BE)

2.2.0 Setzen Sie für die folgenden Teilaufgaben a = 20 und für b = 30.

2.2.1 Erstellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X und zeichnen Sie ein zugehöriges Histogramm. (4 BE)

2.2.2 Bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen. (6 BE)

2007 – SI

2.0 Der Mathematiklehrer einer größeren Klasse hat durch Beobachtungen über einen längeren Zeitraum bemerkt, dass ab und zu einige Schüler ihre Hausaufgabe zum fälligen Termin nicht gemacht haben. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Schüler dieser Klasse an, die zu einem beliebigen Termin die Mathematik-Hausaufgabe nicht erledigt haben. Dabei ergibt sich mit den Parametern a, b, c $\in \mathbb{R}$ folgende Verteilung (andere Zufallswerte treten nicht auf):

x	0	1	2	3	4	5	6
P(X =x)	a	b	0,2	b + c	c	0,1	0,05

2.1 Berechnen Sie die Parameter a, b und c, wenn im Durchschnitt 3 Schüler ihre Hausaufgabe nicht gemacht haben und $P(X \leq 3) = 0{,}65$ ist. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X geeignet graphisch dar. [Teilergebnis: a = 0,05; b = 0,1] (8BE)

2.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen. (4 BE)

2006– SII

3.0 Die Hochschule hat einen Eingangstest in Mathematik abgehalten, an dem genau 500 Studienanfänger aller Fachrichtungen teilgenommen haben. Die Notenverteilung ergibt sich aus der folgenden Tabelle, in der a, b und c entsprechende Konstanten darstellen:

Noten	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Prüflinge	a	b	167	122	b	c

Die Zufallsgröße Y gibt die Note eines beliebig herausgegriffenen Prüflings an. Für diese Zufallsgröße gilt: Der Erwartungswert E(Y) beträgt 3,0 und die Varianz Var(Y) ist gleich 1,7.

3.1 Zeigen Sie zunächst, dass sich aus den obigen Angaben folgendes lineare Gleichungssystem (LGS) herleiten lässt:

I. $a + 2b + c = 211$
II. $a + 7b + 6c = 511$
III. $a + 29b + 36c = 1895$ (5 BE)

3.2 Berechnen Sie nun aus dem LGS von 3.1 die Konstanten a, b und c. (4 BE)
[Lösung: a = 99; b = 52; c = 8]

3.3 Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße Y an und zeichnen Sie ein zugehöriges Histogramm. (4 BE)

3.4 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert E(Y) liegen. Schraffieren Sie anschließend im Histogramm von Teilaufgabe 3.3 die zugehörige Fläche. (4 BE)

2008 – SI

3.0 Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Tassen Tee an, die ein Gast bei einem Frühstück trinkt. Es ergibt sich folgende Verteilung:

x	0	1	2	3	4	5	6 oder mehr
Gästezahl	10	15	5	12	6	2	0

3.1 Erstellen Sie für die Zufallsgröße X die Wahrscheinlichkeitsverteilung und stellen Sie diese geeignet graphisch dar. Berechnen Sie, mit wie viel Tassen Tee der Herbergsvater im Durchschnitt pro Gast rechnen kann. (4 BE)

3.2 Berechnen Sie wie viele Tassen Tee Max pro Gast mindestens bereitstellen muss, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Tee ausreicht, mehr als 90% betragen soll. (3 BE)